

### 3.— Endomorphismes d'un $A$ -module de type fini

**Théorème 3.1.**— *Soient  $M$  un  $A$ -module de type fini et  $u : M \rightarrow M$  un endomorphisme de  $M$ . On a l'équivalence :*

$$u \text{ est surjectif} \iff u \text{ est bijectif.}$$

L'implication  $\Leftarrow$  est évidente. Montrons l'implication opposée  $\Rightarrow$ . Pour cela, soit  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  un système de générateurs de  $M$ . Comme  $u$  est surjectif, il existe des  $y_i \in M$  tels que  $x_i = u(y_i)$ . Les  $x_i$  engendrant  $M$ , il existe des  $a_{ij} \in A$  ( $1 \leq i \leq n$ ) tels que  $y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$ , d'où

$$(3.1.1) \quad x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}u(x_j) \quad (1 \leq i \leq n),$$

ou encore , en munissant  $M$  de la structure de  $A[T]$ -module définie par  $u$ ,

$$(3.1.2) \quad x_i - \sum_{j=1}^n (a_{ij}T)x_j \quad (\text{dans } M).$$

Munissons maintenant le  $A[T]$ -module  $M^n$  de la structure de  $\text{Mat}_n(A[T])$ -module décrite en (2.2.4), on voit que les égalités (3.1.2) fournissent l' égalité (dans  $M^n$ )

$$(3.1.3) \quad \begin{pmatrix} 1 - Ta_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & 1 - Ta_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & 1 - Ta_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0.$$